RZECZPOSPOLITA POLSKA

Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej

(12) **OPIS PATENTOWY** (19) **PL** (11) **181014**

(13) **B1**

(21) Numer zgłoszenia: **316810**

(22) Data zgłoszenia: **31.10.1996**

(51) IntCl[7]
G09B 29/10

(54) Sposób eliminacji punktów w procesie numerycznej generalizacji kartograficznej

(43) **Zgłoszenie ogłoszono:**
11.05.1998 BUP 10/98

(45) **O udzieleniu patentu ogłoszono:**
31.05.2001 WUP 05/01

(73) **Uprawniony z patentu:**
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica, Kraków, PL

(72) **Twórcy wynalazku:**
Tadeusz Chrobak, Kraków, PL

(74) **Pełnomocnik:**
Obłąkowska-Adamek Maria, Akademia Górniczo-Hutnicza im.Stanisława Staszica

(57) 1. Sposób eliminacji punktów w procesie numerycznej generalizacji kartograficznej, polegający na wyborze punktów charakterystycznych łamanej określonej w przestrzeni dwuwymiarowej i badaniu segmentami odcinków do usunięcia, **znamienny tym**, że w zależności od skal wejściowej i wyjściowej map, wyznacza się jednostkową długość e_j odcinka mapy tworzonej, a następnie, w pierwszym etapie, z punktów stanowiących wierzchołki łamanej pierwotnej, z wyjątkiem jej początku i końca, gdyż są one niezmiennikami procesu generalizacji, wybiera się punkty charakterystyczne W_j, określone przez współrzędne X_j, Y_j, według zasady od największej do najmniejszej wartości strzałki badanego punktu w lokalnym układzie współrzędnych i tworzy się segment, jeżeli spełniona jest zasada wcięcia w przód, zgodnie z którą długość ramienia l_j utworzonego z punktu charakterystycznego będącego początkiem segmentu a badanym punktem jest większa od długości jednostkowej e_j i jednocześnie długość ramienia l_j utworzonego z punktu charakterystycznego będącego końcem segmentu a analizowanym punktem jest również większa od długości jednostkowej e_j, po czym po utworzeniu wszystkich możliwych na generalizowanej łamanej następuje drugi etap, w którym sprawdza się w każdym segmencie wartości ilorazu $h = \left[\frac{\sum d_j}{2e_j}\right]$, gdzie nawias [ ] oznacza część całkowitą, a Σd_j sumę długości boków badanego segmentu łamanej i dla przypadku, gdy „h" równa się zero wykonuje się etap trzeci, w którym ocenia się dokładność segmentu łamanej po generalizacji poprzez obliczenie błędu położenia punktu na mapie tworzonej, zaś dla przypadku, w którym „h" jest równe co najmniej jeden wybiera się w tym segmencie nowy punkt na bokach pierwotnej łamanej, poprzez interpolację liniową z wykorzystaniem iteracji metodą bisekcji i doprowadza się do utworzenia dwóch nowych segmentów generalizowanej łamanej, w których uzyskana wartość ilorazu „h" równa się zero, po czym dokonuje się oceny dokładności łamanej po generalizacji, podobnie jak w etapie trzecim.

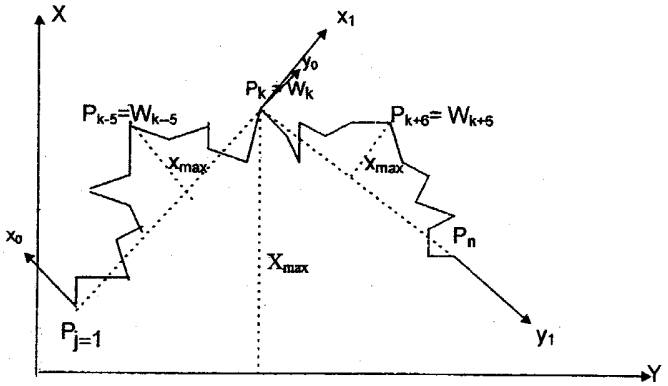

Fig. 2

PL 181014 B1

Sposób eliminacji punktów w procesie numerycznej generalizacji kartograficznej

Zastrzeżenia patentowe

1. Sposób eliminacji punktów w procesie numerycznej generalizacji kartograficznej, polegający na wyborze punktów charakterystycznych łamanej określonej w przestrzeni dwuwymiarowej i badaniu segmentami odcinków do usunięcia, **znamienny tym**, że w zależności od skal wejściowej i wyjściowej map, wyznacza się jednostkową długość e_j odcinka mapy tworzonej, a następnie, w pierwszym etapie, z punktów stanowiących wierzchołki łamanej pierwotnej, z wyjątkiem jej początku i końca, gdyż są one niezmiennikami procesu generalizacji, wybiera się punkty charakterystyczne W_j, określone przez współrzędne X_j, Y_j, według zasady od największej do najmniejszej wartości strzałki badanego punktu w lokalnym układzie współrzędnych i tworzy się segment, jeżeli spełniona jest zasada wcięcia w przód, zgodnie z którą długość ramienia l_j utworzonego z punktu charakterystycznego będącego początkiem segmentu a badanym punktem jest większa od długości jednostkowej e_j i jednocześnie długość ramienia l_j utworzonego z punktu charakterystycznego będącego końcem segmentu a analizowanym punktem jest również większa od długości jednostkowej e_j, po czym po utworzeniu wszystkich możliwych na generalizowanej łamanej następuje drugi etap, w którym sprawdza się w każdym segmencie wartości ilorazu $h = \left[\frac{\sum d_j}{2e_j} \right]$, gdzie nawias [ ] oznacza część całkowitą, a Σd_j sumę długości boków badanego segmentu łamanej i dla przypadku, gdy „h" równa się zero wykonuje się etap trzeci, w którym ocenia się dokładność segmentu łamanej po generalizacji poprzez obliczenie błędu położenia punktu na mapie tworzonej, zaś dla przypadku, w którym „h" jest równe co najmniej jeden wybiera się w tym segmencie nowy punkt na bokach pierwotnej łamanej, poprzez interpolację liniową z wykorzystaniem iteracji metodą bisekcji i doprowadza się do utworzenia dwóch nowych segmentów generalizowanej łamanej, w których uzyskana wartość ilorazu „h" równa się zero, po czym dokonuje się oceny dokładności łamanej po generalizacji, podobnie jak w etapie trzecim.

2. Sposób według zastrz. 1, **znamienny tym**, że jednostkową długość e_j odcinka mapy określa się jako związek pomiędzy danymi wejściowymi i wyjściowymi i wyraża wzorem: $e_j = \frac{n_0 - 1 M_j}{n_j - 1 M_0}$, w którym zgodnie z prawem Topfera $n_j = (M_0/M_j)^{0,5}$ oznacza liczbę punktów łamanej po generalizacji, n_o określa liczbę punktów łamanej pierwotnej, M_o i M_j są to mianowniki skal map źródłowej i tworzonej, zaś e_0 jest długością jednostkową dla mapy w skali mianownika M_0.

3. Sposób według zastrz. 1, **znamienny tym**, że w drugim etapie generalizowania łamanej dla przypadku, gdy wartość ilorazu „h" wynosi co najmniej jeden, jednoznaczne położenie punktu na generalizowanej łamanej ustala się poprzez przyjęcie, że długości ramion do wcinanego nowego punktu są większe od jednostkowej długości e_j i dodatkowo, że różnica długości ramion boków (l_j, l'_j) wcięcia w przód jest minimalna lub że różnica sum długości boków ($\Sigma\Delta D$) łamanej pierwotnej i generalizowanej w każdym segmencie z nowoutworzonym punktem jest minimalna, albo też różnica sum pól ($\Sigma\Delta P$) tych segmentów przed i po generalizacji jest minimalna.

* * *

Przedmiotem wynalazku jest sposób eliminacji punktów w procesie numerycznej generalizacji kartograficznej. Sposób jest przydatny do tworzenia map pochodnych na bazie mapy pod-

stawowej, gdy redukcja skali wejściowej do wyjściowej jest dowolna, a elementy linowe mapy są przedstawiane w postaci łamanych.

Znane sposoby generalizacji łamanych opisane są przez R.B. MacMaster'a w pracy „A statistical analysis of mathematical measures for linear simplification", Amer. Cartographer, vol. 13, 1986 no 2, str. 103-116. Autor dotychczasowe sposoby numerycznej generalizacji łamanych podzielił na pięć kategorii. W kategorii pierwszej punkty eliminowane są metodą statystyczną. Niezależnie od topologii dokonuje się wybór np. co n-tego punktu, w ten sposób przeprowadzając ich przypadkową selekcję. Kategoria druga wykorzystuje charakterystykę bezpośrednio sąsiadujących punktów dla usunięcia punktu. Jest to kategoria lokalnej analizy, w której badane są: odległość i zmiany kąta między sąsiednimi punktami łamanej. W kategorii trzeciej przeprowadzana jest analiza lokalna z ograniczeniami, w której bada się lokalnie punkty do usunięcia. Proces usuwania realizowany jest na podstawie badanego sąsiedztwa np. pięciu punktów i oceny utworzonego segmentu łamanej. Kategoria czwarta polega na rozszerzonej analizie lokalnej, w której badane są odcinki zastąpione segmentami bez ograniczenia długości analizowanego odcinka. Z kolei w kategorii piątej, tzw. globalnej, analizowana jest cała łamana, a punkty charakterystyczne wybieranie są na podstawie maksymalnej odległości (strzałki) w badanym przedziale. Punkty te tworzą łamaną po generalizacji.

Opisane sposoby generalizacji łamanej znajdują zastosowanie do generalizacji elementów liniowych treści map w skalach średnich i małych. Niedogodnością tych sposobów jest brak wymiernego parametru umożliwiającego proces generalizacji łamanej, w sposób automatyczny. Dotychczasowe sposoby nie pozwalają na upraszczanie i równoczesne wygładzanie łamanej, gdy na to pozwalają dane źródłowe. Ponadto żaden z omówionych sposobów nie zapewnia generalizowanej łamanej dokładności określonych normami branżowymi.

Istotą sposobu według wynalazku jest to, że w zależności od skal wejściowej i wyjściowej map wyznacza się jednostkową długość - e_j odcinka mapy tworzonej, a następnie z jej udziałem z punktów stanowiących wierzchołki łamanej pierwotnej, z wyjątkiem jej początku i końca gdyż są one niezmiennikami procesu generalizacji, wybiera się punkty charakterystyczne W_j, określone przez ich współrzędne X_j, Y_j. Dla wybranego wierzchołka W_j, według zasady od największej do najmniejszej wartości strzałki badanego punktu w lokalnym układzie współrzędnych tworzy się segment jeżeli jest spełniona zasada wcięcia w przód, zgodnie z którą długość ramienia l_j utworzonego z punktów charakterystycznych pomiędzy początkiem segmentu a badanym punktem, jest większa od długości odcinka e_j i jednocześnie długość ramienia l'_j, utworzonego z punktów charakterystycznych pomiędzy końcem segmentu a analizowanym punktem, jest również większa od długości odcinka e_j. Po utworzeniu wszystkich możliwych segmentów następuje drugi etap generalizowania łamanej polegający na sprawdzeniu w każdym segmencie wartości ilorazu $h = \left\lfloor \frac{\sum d_j}{2e_j} \right\rfloor$, gdzie nawias [ ] oznacza część całkowitą, a Σd_j sumę długości boków łamanej badanego segmentu. Jeżeli wartość ilorazu h wynosi zero, to wykonuje się trzeci etap generalizowania łamanej, polegający na ocenie dokładności segmentu łamanej po generalizacji poprzez obliczenie błędu położenia punktu na mapie tworzonej. Jeżeli w segmencie badanym, wartość ilorazu h jest równa co najmniej jeden, to tworzy się nowy punkt na bokach pierwotnej łamanej - poprzez interpolację liniową z wykorzystaniem iteracji metodą bisekcji - który segment dotychczasowy dzieli na dwa w których ilorazy h równe są zero. Po czym dokonuje się oceny dokładności łamanej po generalizacji. Jednostkową długość e_j odcinka mapy opisuje związek: $e_j = \frac{n_0 - 1 M_j}{n_j - 1 M_0} e_0$, pomiędzy danymi wejściowymi i wyjściowymi, gdzie według Topfera: $nj = n_o [M_0/M_j]$, przy czym n_o - liczba punktów łamanej pierwotnej, M_o i M_j są to mianowniki skal map: źródłowej i tworzonej, zaś e_o jest długością jednostkową dla mapy w skali mianownika M_0. Ponadto w drugim etapie procesu generalizacji łamanej dla przypadków, w których wartość ilorazu „h" - badanego segmentu generalizowanej łamanej - wynosi co najmniej jeden, jednoznacz-

ne określenie położenia nowego punktu dla nowoutworzonych segmentów, wymaga dodatkowym ustalenia. Warunek ten, w tworzonym segmencie, powinien spełniać jedną z możliwości, tj: różnica ramion boków (l_j, l'_j) wcięcia w przód jest minimalna lub różnica sumy długości boków ($\Sigma\Delta D$) łamanej pierwotnej i generalizowanej jest minimalna, albo też różnica sumy pól ($\Sigma\Delta P$) przed i po generalizacji jest minimalna.

Przedmiot wynalazku jest przedstawiony w przykładzie, na którym fig. 1 obrazuje schemat działań wykonywanych w procesie generalizowania łamanej w oparciu o sposób według wynalazku, a fig. 2, 3, 4, 5 ilustrują kolejne etapy generalizowania konkretnej łamanej. W sposobie tej generalizacji łamanej przyjęto: „zasadę od ogółu do szczegółu", metodę „wcięcia w przód" powszechnie stosowaną w geodezji i zachowanie warunków: koniecznego i wystarczającego, przy czym warunek konieczny przyjmuje następujące brzmienie: na łamanej pierwotnej tworzy się segment, gdy jego długość określona jako miara odcinka o początku i końcu należącym do łamanej pierwotnej jest większa od jednostkowej długości e_j. Warunek wystarczający przyjmuje się zaś w brzmienie: podział łamanej przez wierzchołek o największej wartości strzałki w badanym obszarze jest uwzględniony tylko wtedy, gdy długość nowo utworzonych segmentów jest większa od jednostkowej długości e_j, określonej zależnością: $e_j = \frac{n_0 - 1 M_j}{n_j - 1 M_0}$.

W celu znalezienia punktów charakterystycznych zgodnie z przyjętą zasadą i warunkami, należy:

I. W etapie pierwszym

1. W przedziale wyjściowym (fig. 2) określonym jako $[P_1, P_n]$ znaleźć wierzchołek - $P_k = W_k$ o największej wartości strzałki, który spełnia warunek konieczny dla długości siecznych: $|P_1, W_k|$ i $|W_k, P_n|$.

2. Obliczyć w segmencie $[P_k, W_k]$ dzielącym dotychczasową łamaną - nowe współrzędne wierzchołków w układzie ortogonalnym-x_0, y_o.

W tym celu w segmencie przetwarzanym łączymy punkty: początek - p_j i końcowy - P_{j+k} (oznaczonych odpowiednio P_1 i P_k), uzyskując prostą sieczną. Jest ona osią odciętych w lokalnym układzie, której kąt kierunkowy - $\beta_{j+k,j}$ wyznacza zależność:

$\beta_{j+k,j} = \text{arctg}\frac{X_{j+k} - X_j}{Y_{j+k} - Y_j}$, gdzie: j = 1,2,3, ...n, $j \neq k$.

Po obrocie układu pierwotnego o kąt kierunkowy: $\beta_{j+k,j} - 100^g$, oblicza się współrzędne punktów pośrednich - P_j, w układzie lokalnym, zgodnie z zależnością $x_j = (X_j - M)\sin(\beta_{j+k,j} - 100^g) + (Y_j - N)\cos(\beta_{j+k,j} - 100^g)$,

$y_j = (X_j - M)\cos(\beta_{j+k,j} - 100^g) + (Y_j - N)\sin(\beta_{j+k,j} - 100^g)$,

gdzie: M, N - są współrzędnymi dla początku układu - P_j

Po transformacji układów współrzędnych, w przedziale $[P_1, W_k]$ szukany jest wierzchołek W_{k-5} o największej rzędnej i sprawdzane warunki: konieczny i wystarczający dla długości siecznych: $|P_1, W_{k-5}|$ i $|W_{k-5}, W_k|$. Jeśli są spełnione, to dotychczasowy segment $[P_1, W_k]$ ulega podziałowi na dwa nowe: $[P_1, W_{k-5}]$ i $[W_{k-5}, W_k]$,

3. W segmencie $[W_k, P_n]$ wyjściowe współrzędne punktów łamanej przeliczane są na lokalny układ - x_1, y_1 i szukany jest wierzchołek o największej rzędnej W_{k+6}. Jeżeli długości siecznych: $|W_k, W_{k+6}|$ i $|W_{k+6}, P_n|$, spełniają przyjęte warunki, to tworzone są kolejne segmenty: $[W_k, Wk_{k+6}]$ i $[W_{k+6}, P_n]$, mniejsze od poprzednich.

4. Następnie dokonuje się powtórzenia procedur z punktów 2 i 3 w celu utworzenia następnych segmentów łamanej.

Etap pierwszy, zwany etapem hierarchizacji wierzchołków łamanej, jest zakończony gdy zostaną zbadane wszystkie jej wierzchołki oraz gdy w każdej kombinacji punkty początkowy i końcowy segmentu, z pozostającymi w nim wierzchołkami, nie tworzą nowego segmentu, gdyż nie zachowują warunków koniecznego i wystarczającego.

Wyjaśnienia wymagają przypadki tworzenia segmentów, w których nie są spełnione równocześnie obydwa warunki:

a) gdy punkt o największej wartości strzałki lub rzędnej nie spełnia warunku wystarczającego w podziale na dwa segmenty. W tym przypadku poszukuje się punktu o wartości kolejno mniejszego od maksymalnej, ale spełniającego ten warunek.

b) gdy w utworzonym segmencie łamanej współrzędne zmiennej niezależnej wierzchołków są rosnące i malejące lub na odwrót. Dowodzi to o skomplikowanym przebiegu łamanej i niewłaściwie dla niej ustalonym stopniu redukcji skal źródłowej do tworzonej, od których zależy długość jednostkowa. Eliminację tych zdarzeń uzyskuje się przez ponowne przeprowadzenie procesu upraszczania, przy zmniejszonej długości jednostkowej e_j (przez zmniejszenie redukcji skali wejściowej do wyjściowej). Po pierwszym etapie łamana pierwotna stanowi zbiór wyróżnionych wierzchołków:

$Ł = \{W_j, W_{j+k-m}, W_{j+k}, W_{j+k+p}, ...W_n\}$,

gdzie: j, k, m, p, n - to liczby naturalne.

II. W drugim etapie generalizacji łamanej każdej z utworzonych segmentów $[W_j, W_{j+k-m}]$, $[W_{j+k-m}, W_{j+k}]$ jest oddzielnie sprawdzany, w zależności od tego czy proces jest w nim zakończony, lub czy istnieje możliwość wybrania nowego punktu. W dotychczas utworzonych segmentach łamanej pierwotnej długość każdego z nich jest większa od długości jednostkowej e_j. Eliminowane z nich wierzchołki mają jedną z odległości (fig. 3) do początku l_j lub jego końca l_{j+m}, mniejszą od długości jednostkowej e_j, co powoduje ich usunięcie.

W celu stwierdzenia czy w segmencie proces jest zakończony, sprawdza się iloraz:

$$h = \left\lfloor \frac{\lceil \sum d_j \rceil}{2e_j} \right\rfloor .$$

Jeżeli wartość jego z dokładnością do całkowitej części liczby wynosi zero, to proces jest zakończony. Jeżeli wartość „h" jest równa co najmniej jeden, to w badanym segmencie istnieje możliwość wyznaczenia nowego punktu. W określeniu jego zastosowanie ma interpolacja liniowa z wykorzystaniem iteracji metodą bisekcji (połowienia). Metoda postępowania jest następująca.

1). Pierwsze przybliżenie położenia szukanego punktu (fig. 4) wyznaczają równania:

$\Sigma d_{sj} + u = e_j$ oraz $\Sigma d_{rj} + v = e_j$, w których:

d_{sj} oznacza długości boków sumowanych od początku segmentu w kierunku nowego punktu, a d_{rj} oznacza długości boków sumowanych od końca segmentu w kierunku nowego punktu.

W segmencie dla którego bok pierwszy $d_{sj} > e_j$, to suma $\Sigma d_{sj} = 0$, zaś gdy bok ostatni (końcowy) $d_{rj} > e_j$, to suma $\Sigma d_{rj} = 0$.

2). Na podstawie obliczonych niewiadomych u i v, wyznacza się współrzędne punktów P_w i $P_{w'}$ które:

- pozwolą stwierdzić przynależność nowych punktów do jednego bądź dwóch boków łamanej przez wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez istniejące dwa punkty pośrednie łamanej, na których znajduje się punkt P_w, następnie przez sprawdzenie czy współrzędne drugiego punktu P_w' spełniają to równanie z dokładnością błędu obliczeń. Jeżeli współrzędne P_w sprawdzają to równanie, to wówczas punkty należą do jednego boku łamanej. Jeżeli współrzędne P_w nie sprawdzają równania, to punkty należą do różnych boków łamanej.

- umożliwiają obliczenie długości siecznych do nowowybranych punktów:

$$|W_j P_w| \overset{ozn}{=} |L_j| \text{ oraz } |W_{j+m} P_{w'}| \overset{ozn}{=} |L'_{j+m}| .$$

Wyróżnienie nowego wierzchołka następuje, gdy długości sieczne między tym punktem (leżącym na łamanej) a końcami segmentu są większe od długości jednostkowej.

3). Omówiony sposób pozwala wyznaczyć położenie nowego punktu generalizacji łamanej, gdy rozwiązanie należy do jednego boku łamanej pierwotnej. Jednak dotychczasowe określenie nowego punktu nie uwzględnia przeznaczenia mapy, który jest dodatkowym warunkiem. Jest on zachowany wówczas, gdy dla nowotworzonego punktu w następnych iteracjach, uczest-

niczy jeden z trzech dodatkowych warunków: najmniejszej różnych długości (l_j, l'_j) wcięcia w przód w segmencie, najmniejszej w segmencie różnicy między sumami długości boków ($\Sigma\Delta D$) łamanej pierwotnej i generalizowanej lub minimalnej różnicy sum pól ($\Sigma\Delta P$) między łamanymi pierwotną i generalizowaną tworzonego segmentu.

Wybór nowego punktu, gdy rozwiązanie przybliżone wskazuje położenie jego na dwóch różnych bokach generalizowanej łamanej przebiega odmiennie jak dla rozwiązania dla wspólnego boku. W tym przypadku (fig. 5) punkt zostanie utworzony tylko wtedy, gdy spełniona jest jedna z zależności:

$l_j > e_j \wedge L_{j+m} > e_j$, to nowy punkt: $W_{0j} \in [P_w, P_{j+4})$,

lub

$l_{j+m} > e_j \wedge L'_j > e_j$, to nowy punkt: $W'_{0j} \in (P_{j+4}, P_{w'}]$.

Zachowanie jednej z tych zależności oznacza rozszerzenie dotychczasowego warunku koniecznego dla utworzenia, na boku łamanej pierwotnej, nowego wierzchołka. Spełnienie tej zależności dla długości segmentu tworzonego na podstawie nowego punktu to pierwsze, uzyskane z interpolacji liniowej, przybliżenie tej części łamanej po generalizacji.

Położenie ostateczne nowego punktu generalizowanej łamanej uzyskuje się, gdy w dalszych krokach iteracyjnych uwzględniony zostanie jeden z trzech dodatkowych warunków, zależny od przeznaczenia tworzonej mapy.

III. Etap trzeci generalizacji polega na ocenie dokładności geometrii łamanej po generalizacji i obejmuje obliczenia:

a) najkrótszej odległości „s" między usuwanym a sąsiadującymi z nim wierzchołkami łamanej po generalizacji,

b) sumy kwadratów tych odległości,

c) średniego błędu jednostkowego wyrażającego się wzorem:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum ss}{n-1}},$$

w którym „n" to liczba punktów usuwanych na pierwotnej mapie,

d) błędu położenia punktu m_p, mapy tworzonej za pomocą wzoru: $m^2_p = m^2_a = m^2_0$.

Proces jest zakończony, gdy uzyskana po generalizacji łamana zachowuje wymaganą dokładność.

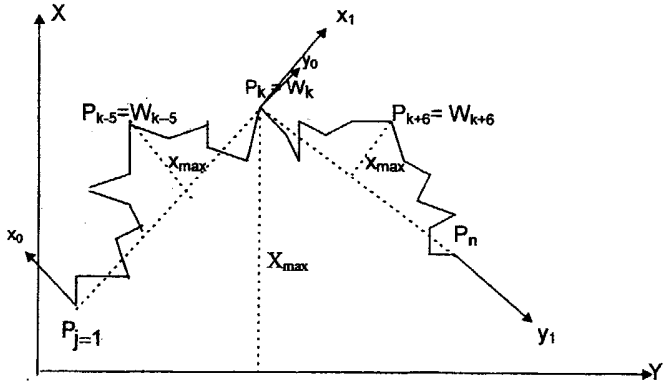
X
x1
y0
Pk = Wk
Pk-5=Wk-5
Pk+6= Wk+6
xmax
xmax
x0
Pn
Xmax
Pj=1
y1
Y

Fig. 2

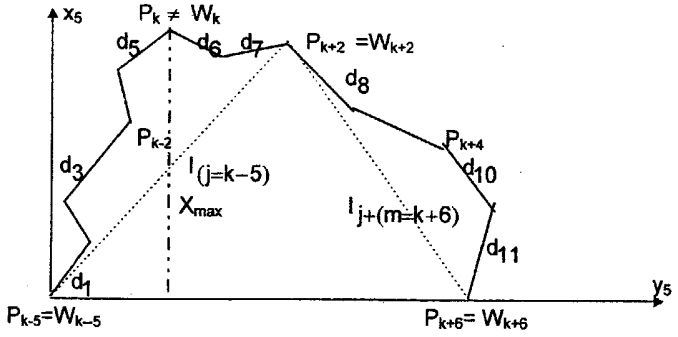
x5
Pk ≠ Wk
d5
d6
d7
Pk+2 =Wk+2
d8
Pk-2
Pk+4
d3
l(j=k-5)
d10
Xmax
lj+(m=k+6)
d11
d1
y5
Pk-5=Wk-5
Pk+6= Wk+6

Fig.3

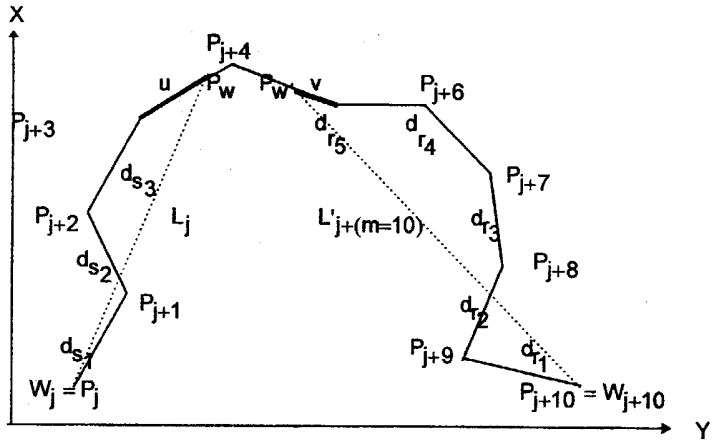
X
Y
P_{j+4}
u
P_w
$P_{w'}$
v
P_{j+6}
P_{j+3}
d_{r_5}
d_{r_4}
P_{j+7}
d_{s_3}
P_{j+2}
L_j
$L'_{j+(m=10)}$
d_{r_3}
P_{j+8}
d_{s_2}
P_{j+1}
d_{r_2}
d_{s_1}
P_{j+9}
d_{r_1}
$W_j = P_j$
$P_{j+10} = W_{j+10}$

Fig. 4

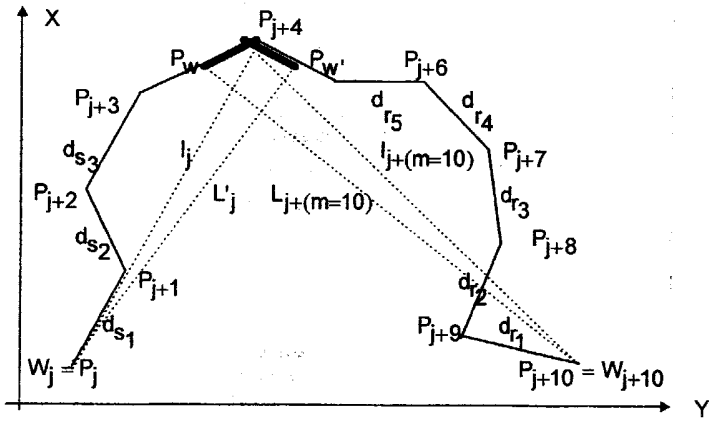
X
Y
P_{j+4}
P_w
$P_{w'}$
P_{j+6}
P_{j+3}
d_{r_5}
d_{r_4}
d_{s_3}
l_j
$l_{j+(m=10)}$
P_{j+7}
P_{j+2}
L'_j
$L_{j+(m=10)}$
d_{r_3}
d_{s_2}
P_{j+8}
P_{j+1}
d_{r_2}
d_{s_1}
P_{j+9}
d_{r_1}
$W_j = P_j$
$P_{j+10} = W_{j+10}$

Fig. 5

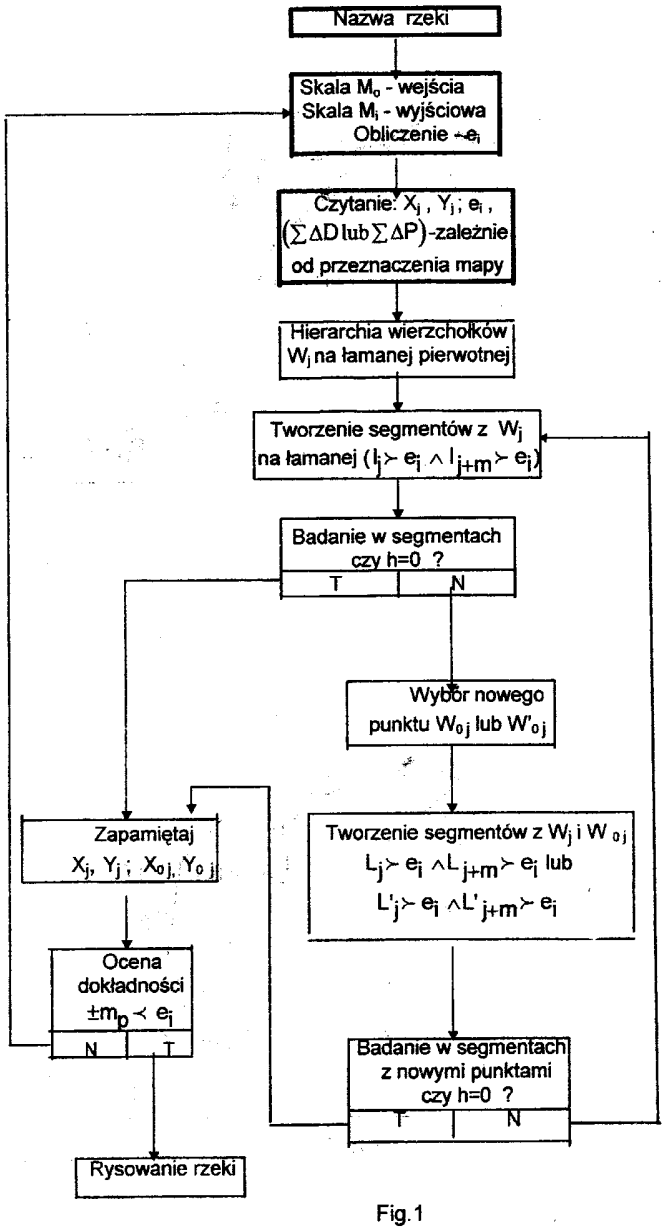

Fig.1

Departament Wydawnictw UP RP. Nakład 60 egz.
Cena 2,00 zł.